EXERCÍCIOS CAPÍTULO 6

1. Em determinada universidade verifica-se que 30% dos alunos têm carro. Selecciona--se uma amostra casual de 20 alunos.
   a) Qual a probabilidade de o primeiro aluno escolhido ter carro, e os outros, não?
   b) Qual a probabilidade de, no máximo, 10 alunos terem carro?
   c) Calcule o valor esperado e a variância da proporção de alunos, na amostra, com carro.

2. O número de gralhas por página, em certo tipo de publicações, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson cuja média está estimada em 0.3. Supõe-se que existe independência entre o número de gralhas em páginas diferentes.
   a) Numa amostra de cinco páginas, qual a probabilidade de as duas primeiras terem uma gralha cada, e de as restantes não terem gralhas?
   b) Se a amostra casual for de 20 páginas, calcule a probabilidade de o número total de gralhas encontrado ser de pelo menos 8.
   c) Para uma amostra de 50 páginas, obtenha o valor esperado e a variância da média de gralhas nessa amostra.
   d) Voltando às amostras da alínea a), calcule e interprete $P\{\max(X_i) \le 1\}$.
   e) Numa publicação do tipo apresentado com 100 páginas, qual a probabilidade de pelo menos 80 delas não terem qualquer gralha?

3. Considere uma população, *X*, com função probabilidade dada por

   $$f(x) = P(X = x) = 1/3 \quad (x = 0, 1, 2),$$

   da qual se recolheu uma amostra casual de dimensão $n = 3$. Determine a distribuição do máximo e do mínimo da amostra.

4. Seja uma amostra casual de dimensão 5, retirada de uma população com função densidade, $f(x) = 3x^2 \quad (0 < x < 1)$.
   Determine a probabilidade de o valor máximo dessa amostra não exceder 0.9.

5. Retome o exercício 4 e defina a variável aleatória *N*, número de elementos, na amostra, que não excedem 0.9.
   a) Determine a distribuição de *N*.
   b) Responda à pergunta do exercício 4 utilizando a variável *N*.

6. Realizam-se diariamente cinco voos com partida em *A* e chegada em *B*. O atraso na partida do avião, em minutos, tem distribuição exponencial de média 15 minutos. Nos voos de um dia, qual a probabilidade de o menor atraso ser inferior a 18 minutos? Qual a probabilidade de o maior atraso ser superior a 30 minutos?

7. Seleccionaram-se aleatoriamente 15 amplificadores que se ligaram em simultâneo. Admitindo que o tempo de vida de um amplificador tem distribuição normal de média igual a 1000 horas e desvio padrão de 200 horas, determine a probabilidade de o primeiro a deixar de funcionar ter tido um tempo de vida superior a 800 horas.

8. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_8)$ uma amostra casual de uma população com distribuição exponencial de parâmetro θ.
   a) Obtenha a distribuição da média da amostra.
   b) Calcule $P(\overline{X} > 2/\theta)$.
   c) Encontre uma expressão para $P(X_1 \le c, X_2 \le c, \ldots, X_8 \le c)$, e relacione esse resultado com as distribuições dos extremos da amostra.

9. O tempo, em minutos, que uma pessoa demora a servir-se na cantina da faculdade é uma variável aleatória com função densidade

   $$f(x) = e^{-x} \quad (x > 0).$$

   Se às 14:00 se encontram 40 pessoas na fila do almoço dessa cantina, calcule a probabilidade de que nenhuma delas esteja por servir às 14:30.

10. Considere que o tempo de execução de uma peça é uma variável aleatória com distribuição exponencial, de média 5 minutos.
    a) Escreva a expressão da função densidade de uma amostra aleatória de dimensão cinco.
    b) Calcule a probabilidade de os tempos de execução das duas primeiras peças da amostra serem inferiores a 8 minutos, e nas outras, superior.
    c) Tomadas cinco peças ao acaso, calcule a probabilidade de duas delas terem tido um tempo de execução máximo de 8 minutos. Compare com a alínea anterior.
    d) Para amostras de dimensão 100, obtenha a distribuição da soma e da média da amostra, e indique as respectivas médias e variâncias.
    e) Ainda com amostras de dimensão 100, comente a seguinte frase: “Em 90% dos casos o tempo médio de execução é inferior a 10 minutos.”

11. Admita que o consumo diário de água (em metros cúbico) numa exploração agrícola, durante os meses de Verão, é uma variável aleatória com distribuição normal de média 8 e desvio padrão 2. Em cinco dias escolhidos ao acaso, qual a probabilidade do menor consumo exceder 5 metros cúbicos?

12. Seleccionou-se uma amostra casual de 4 lâmpadas que se ligaram em simultâneo. Sabe-se que a duração de uma lâmpada tem distribuição normal com média 800 horas e desvio padrão 100 horas.
    a) Determine a probabilidade de a primeira lâmpada que deixa de funcionar ter durado mais de 900 horas.
    b) Qual a probabilidade de a última lâmpada a deixar de funcionar ter estado acesa mais de 1000 horas?
    c) Qual a probabilidade de a duração média da amostra diferir da duração média da população por mais que 100 horas?

13. O tempo que um aluno despende por dia no *messenger* tem distribuição exponencial com média 2 horas. Seleccionaram-se 5 dias ao acaso tendo-se observado o tempo despendido no *messenger* em cada um deles.
    a) Calcule a probabilidade do tempo médio despendido no *messenger*, por dia, ser superior a 4 horas?

b) Qual a probabilidade de o tempo máximo despendido por dia, não ultrapassar 6 horas?

14. O tempo decorrido desde a participação da avaria até à reparação (tempo de reparação) de um certo tipo de máquina é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 4 horas.
   a) Em dez avarias participadas qual a probabilidade de o menor dos tempos de reparação ser superior a 2 horas? E do maior dos tempos de reparação não ultrapassar as 8 horas?
   b) Numa amostra casual de 40 avarias qual a probabilidade da média dos tempos de reparação ser inferior a 5.1 horas?

15. Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f(x) = 2x \quad (0 < x < 1),$$

   e $(X_1, X_2, \ldots, X_{36})$, uma amostra casual de dimensão 36 dessa população.
   a) Determine $P(0.4 \le \overline{X} \le 0.6)$.
   b) Qual o valor de k tal que $P(\overline{X} \le k) = 0.95$?

16. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.
   a) Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual simples de dimensão n e $\overline{X}$ a média da referida amostra. Então $T = 10 + e^{\overline{X}}$ é uma estatística.
   b) Considere uma amostra casual $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ de uma população X com distribuição normal. Então a média da amostra é igual à média da população.
   c) A variância da média da amostra nunca é superior à variância da população.
   d) Considere duas amostras casuais independentes de dimensão n, retiradas da mesma população, e sejam $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $P(\overline{X}_1 > x) = 1 - P(\overline{X}_2 \le x)$.
   e) Considere duas amostras casuais independentes obtidas de uma população X e sejam $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 0$.

17. Realiza-se uma série de lançamentos de um dado até sair a face com seis pintas. O número de lançamentos necessários por série, para cumprir o objectivo, é uma variável aleatória X tal que $E(X) = 6$ e $E\{X(X-1)\} = 60$.
   a) Calcule $\mathrm{Var}(X)$.
   b) Numa amostra casual de 100 séries de lançamentos calcule, aproximadamente, a probabilidade de o número médio de lançamentos por série se situar entre 4 e 8 (inclusive).

18. O tempo necessário ao preenchimento de um formulário pode ser considerado uma variável aleatória X de média 9 e desvio padrão 4.5 minutos. Selecciona-se uma amostra casual de 100 formulários para observar os tempos de preenchimento.
   a) Calcule a probabilidade da média desta amostra ser superior a 10 minutos?
   b) Foram introduzidas alterações no formulário acima referido, considerando-se agora que, embora se mantenha a variabilidade (desvio padrão igual a 4.5

minutos), o tempo médio necessário ao preenchimento reduziu em 3 minutos, ou seja, passou para 6 minutos. Seleccionada uma amostra casual de 100 formulários pós-alterações (de forma independente da amostra inicial), qual a probabilidade da média desta amostra ser inferior à média da amostra inicial em pelo menos 2 minutos?

19. Da experiência passada apurou-se que em 5% das declarações de IRS entregues constam deduções ilegais. Para efeitos de controlo foram examinadas 1000 declarações escolhidas casualmente de entre todas as entregues. Supondo que se mantém o padrão de anos anteriores, calcule a probabilidade de pelo menos 60 terem esse tipo de ilegalidade.

20. Admita que a probabilidade de um estudante, escolhido ao acaso, ter opinião favorável à existência de aulas teóricas é de 0.5.
    a) Numa amostra casual de 50 alunos, qual a probabilidade aproximada de se observarem mais de 35 com opinião favorável?
    b) Qual o número mínimo de alunos a inquirir de modo que a divergência entre a frequência relativa da amostra e a verdadeira proporção seja inferior a 2%, com probabilidade de pelo menos 95%?

21. Um distribuidor de uísque sabe, por experiência, que a probabilidade de existirem garrafas falsificadas no mercado é de 0.05. Regularmente são verificadas mil garrafas, nos postos de venda. Com pelo menos 0.98 de probabilidade, qual o desvio máximo a admitir entre a frequência relativa das garrafas não falsificadas e a verdadeira proporção?

22. Admitindo que um em cada cinco alunos usa óculos, qual a probabilidade de se observar mais que 30% de alunos com óculos, numa amostra de dimensão 20? E numa amostra de dimensão 50?

23. Num lote de 500 peças existem 40 defeituosas. O lote será rejeitado se, retirada uma amostra casual de peças desse lote, se observar mais que 5% de peças defeituosas.
    a) Determine a dimensão mínima da amostra para que a probabilidade de não rejeição deste lote não ultrapasse 0.1.
    b) Suponha que procedia, como seria natural num problema deste tipo, à escolha da amostra sem reposição. Recorrendo a meios computacionais, mostre que a dimensão mínima necessária seria $n = 108$ (ou $n = 107$ se utilizar o teorema do limite central).

24. Num clube desportivo, a proporção de adeptos com opinião favorável sobre a direcção é de 75%.
    a) Em 1000 adeptos seleccionados casualmente qual é, aproximadamente, a probabilidade de se observarem menos de 720 com opinião favorável à direcção?
    b) Qual deverá ser a dimensão mínima de uma amostra casual de adeptos para que o desvio entre a frequência relativa da amostra e a verdadeira proporção de adeptos favoráveis à direcção não atinja 0.02 em pelo menos 95% dos casos?

25. Em duas populações independentes, sabe-se que a proporção de indivíduos com acesso à Internet é idêntica e igual a 0.6 ($\theta_1 = \theta_2 = 0.6$).
Se se observar uma amostra de dimensão 48, de cada uma das populações, qual a probabilidade da diferença entre as proporções amostrais ser superior a 0.2? E se as amostras tiverem dimensão 100?

26. Ao iniciar a campanha para um referendo, o "SIM" tem, na população, uma proporção de votantes de 53%. Finda a campanha, esta proporção passou para 49%. Caso se tenha recolhido uma amostra casual de dimensão 100 no início da campanha e outra, independente da primeira, de dimensão 120 no final, qual a probabilidade dos valores amostrais apontarem para um crescimento dos apoiantes do "SIM"?

27. Depois de uma vigorosa campanha publicitária a quota de mercado das batatas fritas "As Estaladiças" passou de 8% para 10%. Suponha que se tinham realizados 2 inquéritos por amostragem, um antes de se iniciar a campanha (amostra de dimensão 100) e outro duas semanas depois do final da campanha (amostra de dimensão 300).
   a) Qual a probabilidade de se concluir, recorrendo aos referidos inquéritos, que o ganho de quota de mercado tinha sido superior a 5 pontos percentuais?
   b) Qual a probabilidade de os inquéritos concluírem por uma perda de quota de mercado?

28. Suponha que está em presença de duas populações de Bernoulli, onde $\theta_1 = 0.6$ e $\theta_2 = 0.5$. Se se retirar da primeira população uma amostra com 50 observações, e da segunda uma outra com 40 elementos, qual é aproximadamente a probabilidade de que o desvio entre as duas proporções amostrais seja, em valor absoluto, superior a 0.2?

29. Recolheu-se uma amostra casual de dimensão 5 de uma população normal. Determine a probabilidade de o desvio padrão da amostra ser inferior ao desvio padrão da população.

30. De uma população normal de média 8 e desvio padrão 4 tomou-se uma amostra casual de dimensão 100.
   a) Qual a probabilidade de a média da amostra diferir da média da população em mais de 0.5?
   b) Se a população não fosse normal, qual seria essa probabilidade?

31. Seja $X \sim N(20;25)$. Calcule a dimensão da amostra de modo que seja pelo menos igual a 0.9 a probabilidade de a média da amostra se situar entre 18 e 22.

32. O responsável pelo controlo de qualidade estabeleceu que uma máquina está desafinada se numa amostra casual de 16 peças, seleccionadas da produção diária, o comprimento médio observado for superior a 61.1 ou inferior a 58.9. Admita-se que o comprimento de uma peça, quando a máquina está afinada, tem distribuição normal de média 60 e desvio padrão 3.
   a) Qual a probabilidade de a máquina ser considerada desafinada indevidamente?
   b) Qual deve ser a dimensão mínima da amostra para que a probabilidade da má-

quina ser indevidamente considerada desafinada seja inferior a 0.05.

33. Considere uma variável aleatória *T*, com distribuição *t-Student* com 10 graus de liberdade.
    a) Determine *a* tal que $P(T < a) = 0.05$.
    b) Calcule $P(T < 0.26)$.
    c) Detemine *b* tal que $P(T > b) = 0.9$.
    d) Obtenha *c* tal que $P(-c < T < c) = 0.95$.

34. Considere uma variável aleatória *X*, com distribuição *F-Snedecor* com 8 e 20 graus de liberdade.
    a) Determine *a* tal que $P(X < a) = 0.95$.
    b) Determine *b* tal que $P(X < b) = 0.05$.
    c) Calcule $P(0.25 < X < 2.45)$

35. Considere duas variáveis aleatórias *X* e *Y* independentes tais que: *X* tem distribuição normal de média 0 e variância 3; *Y* tem distribuição de qui-quadrado com 60 graus de liberdade. Calcule:
    a) Valor da constante *c* tal que $P(X < c\sqrt{Y}) = 0.95$.
    b) $P(5X^2 \leq Y)$.

36. Sejam três variáveis aleatórias independentes: $X \sim N(0,2)$; $Y \sim \chi^2(10)$; $Z \sim \chi^2(5)$. Calcule:
    a) $P(X / \sqrt{Y} \leq 1)$.
    b) Calcule *a* de modo a que $P(Y > a\,Z) = 0.95$.

37. De uma população normal de média e variância desconhecidas retirou-se uma amostra casual.
    a) Determine a percentagem de amostras em que a sua média difere da média da população, por valores superiores ao desvio padrão da população, considerando que a amostra tem 4 observações.
    b) Determine a percentagem de amostras de 5 observações em que as suas médias diferem da média da população, por valores superiores ao do desvio padrão da amostra.

38. Um investigador pretende estimar a média de uma população normal utilizando para tal a média da amostra. Considere a probabilidade de a diferença, em valor absoluto, entre a média da amostra e a média da população ser inferior a metade do desvio padrão corrigido da amostra. Qual deve ser a dimensão mínima da amostra para que aquela probabilidade seja superior a 0.9?

39. De uma população normal de variância 64, tomou-se uma amostra de dimensão 3.
    a) Qual a probabilidade de a variância da amostra exceder 78?
    b) Responda à mesma pergunta para uma amostra de dimensão 16.

40. Sejam duas variáveis aleatórias independentes, X_1 e X_2, ambas com distribuição normal de média 0 e variância 1.
    a) Prove que $Z_1 = X_2 + X_1$ e $Z_2 = X_2 - X_1$ são variáveis aleatórias independentes.

b) Indique a distribuição de:
   i) $Y_1 = X_2 - X_1$;
   ii) $Y_2 = X_1^2 / X_2^2$;
   iii) $Y_3 = (X_1 + X_2)^2 / (X_1 - X_2)^2$.

41. Um centro emissor de cartões de segurança tem dois equipamentos de personalização, de funcionamento independente. O tempo de processamento, em segundos, para cada um deles tem comportamento normal com o mesmo tempo médio, sendo o desvio padrão do primeiro 10, e do segundo 15. Considerando amostras de 16 cartões personalizados de cada um dos equipamentos,
   a) Calcule a probabilidade de a diferença entre as médias das duas amostras, em valor absoluto, ser superior a 5.
   b) Qual a probabilidade do desvio padrão dos tempos de processamento dos cartões da amostra do primeiro equipamento ser superior ao da amostra do segundo equipamento?

42. Um comerciante pretende adquirir frutos de um dos pomares *A* ou *B*. Como o peso dos frutos é factor preferencial, o comerciante toma uma amostra casual de 36 frutos e escolhe o pomar a que corresponde a amostra com maior peso médio. Suponha que o peso dos frutos tem distribuição normal a verificar:

Pomar	Média (g)	Desvio padrão
A	20	2
B	18	5

   Com que probabilidade escolhe o comerciante o pomar *B*? Relacione esta probabilidade com a dimensão das amostras.

43. O consumo de combustível (em litros por 100 km), dos automóveis das marcas *A* e *B* são variáveis aleatórias independentes, *X* e *Y* respectivamente, com distribuição normal em que: $\mu_X = 8.1$, $\sigma_X = 1.2$, $\mu_Y = 7.7$ e $\sigma_Y = 1.5$. Um potencial comprador de um automóvel de uma destas marcas, vai observar os consumos de uma amostra casual de 25 automóveis de cada uma das marcas, e decidirá comprar o que tiver menor consumo médio. Qual a probabilidade de comprar um automóvel da marca *A*?

44. De duas populações normais com médias iguais, e variâncias $\sigma_1^2 = 50$ e $\sigma_2^2 = 40$, colheram-se, independentemente, amostras de 100 elementos. Qual a probabilidade de o valor absoluto da diferença entre as médias das amostras exceder 2?

45. De duas populações normais independentes, com variâncias iguais, foram extraídas duas amostras casuais com dimensões 10 e 5, respectivamente. Determine os valores tais que entre eles esteja, com 95% de probabilidade, a razão das variâncias corrigidas das amostras.

46. Admita a existência de duas populações nas quais são definidas as variáveis aleatórias *X* e *Y*, com distribuições normais, e tais que

$$E(X) = 20, \; E(Y) = 22 \text{ e } \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 16 .$$

Considere que se obtêm duas amostras casuais independentes, uma de cada população, com 9 e 16 elementos, respectivamente.

a) Qual a probabilidade de a média da segunda amostra exceder a média da primeira em mais de três unidades?

b) Qual a probabilidade de o desvio padrão corrigido da primeira amostra ultrapassar o dobro do desvio padrão corrigido da segunda amostra?

47. Classifique as afirmações abaixo, verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

a) Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de dimensão n obtida de uma população X e $\overline{X}$ a média da referida amostra. Existindo $E(X)$, então $E(\overline{X}) = \dfrac{X_1 + X_n}{2}$.

b) Considere duas amostras casuais, independentes e de diferente dimensão, obtidas de uma população X e sejam $\overline{X}_1$ e $\overline{X}_2$ as respectivas médias amostrais. Então $P(\overline{X}_1 \le x) = P(\overline{X}_2 \le x)$.

c) Se W tem distribuição t de Student então $P(W > a) = P(W < -a)$ para qualquer a positivo.

d) Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de dimensão n obtida de uma população X. Então $P(X_{(n)} \le x) = [P(X_1 \le x)]^n$ para todo o x.

e) Se X e Y são independentes, $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$ então $\dfrac{nX^2}{Y} \sim F_{(1,n)}$.

SOLUÇÕES

1. a) 0.000342; b) 0.9829; c) 0.3, 0.0105.
2. a) 0.0201; b) 0.256; c) 0.3, 0.006; d) 0.8286; e) 0.108.
3. Máximo: $g(0)=1/27$, $g(1)=7/27$, $g(2)=19/27$;
   Mínimo: $h(0)=19/27$, $h(1)=7/27$, $h(2)=1/27$.
4. 0.2059.
5. a) $B(5, 0.729)$; b) 0.2059.
6. 0.9975, 0.5167.
7. 0.0749.
8. a) $\overline{X} \sim G(8, 8\theta)$; b) 0.01.
9. 0.0463.
10. a) $(1/5)^5 \exp\{(-1/5)(x_1 + \cdots + x_5)\}$; b) 0.00524; c) 0.0524; d) 500, 2500, 5, 0.25.
11. 0.7077.
12. a) 0.000633; b) 0.0881; c) 0.0456.
13. a) 0.02925; b) 0.7746.
14. a) 0.0067, 0.2336; b) 0.9508.
15. a) 0.0446; b) 0.731.
16. a) V; b) F; c) V; d) V; e) F.
17. a) 30; b) ≈ 1 (0.99975).
18. a) 0.0131; b) 0.9419.
19. 0.084.
20. a) 0.0015; b) 2401.
21. 0.0160.
22. 0.0867; 0.0262 (exacta: 0.0308).
23. a) 135; b) 107.
24. a) 0.013; b) 1801.
25. 0.0455, 0.0039.
26. 0.2776.
27. a) 0.176; b) 0.2676.
28. 0.1733.
29. 0.7127.
30. a) 0.2112; b) aproximadamente a mesma da alínea a).
31. 17.
32. a) 0.1416; b) 29.
33. a) -1.8125; b) 0.6; c) -1.372; d) 2.228.
34. a) 2.45; b) 0.3175; c) 0.925.
35. a) 0.3736; b) 0.95.
36. a) 0.975; b) 0.6006.
37. a) 0.0456; b) 0.1161.
38. 13.
39. a) 0.1607; b) 0.192.
40. b) i) $N(0, 2)$; ii) $F(1,1)$; iii) $F(1,1)$.

41. a) 0.2673; b) 0.0637.
42. 0.0129.
43. 0.149.
44. 0.0348.
45. 0.2119, 8.90.
46. a) 0.2743; b) 0.01.
47. a) F; b) F; c) V; d) V; e) V.